Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Bal in de sloot

1 maximumscore 4

- De gevraagde inhoud I is $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ — 1
- $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^h (22x - x^2)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $22x - x^2$ is $11x^2 - \frac{1}{3}x^3$ — 1
- $I = \pi(11h^2 - \frac{1}{3}h^3) = \pi h^2(11 - \frac{1}{3}h)$ — 1

2 maximumscore 3

- Er moet gelden $\pi h^2(11 - \frac{1}{3}h) = 425$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 37 (mm) (of 3,7 cm) — 1

Cirkels in een driehoek

3 maximumscore 4

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt) $AC = 5$ 1
- Noem de straal van de cirkel x, dan $BP = BQ = x$ 1
- $AR = AP = 4 - x$ en $CR = CQ = 3 - x$ 1
- ($AC = AR + CR$, dus) $(4 - x) + (3 - x) = 5$ geeft $x = 1$ 1

of

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt) $AC = 5$ 1
- oppervlakte(ΔABC) = oppervlakte(ΔABM) + oppervlakte(ΔBCM) + oppervlakte(ΔCAM) 1
- Dit geeft $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot x + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot x + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot x$ 1
- $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x$ geeft $x = 1$ 1

4 maximumscore 3

- ($\Delta AUN \sim \Delta APM$, dus) $\dfrac{AU}{AP} = \dfrac{UN}{PM}$ (of $\dfrac{AU}{UN} = \dfrac{AP}{PM}$) 1
- $AP = AB - PB = 4 - 1 = 3$ 1
- $\dfrac{AU}{3} = \dfrac{r}{1}$ geeft $AU = 3r$ 1

of

- ($\Delta AUN \sim \Delta NTM$, dus) $\dfrac{AU}{NT} = \dfrac{UN}{TM}$ 1
- $\dfrac{AU}{3 - AU} = \dfrac{r}{1 - r}$ 1
- De herleiding tot $AU = 3r$ 1

Opmerking
De hierboven genoemde gelijkvormigheden hoeven niet te worden aangetoond.

5 maximumscore 5

- $NT = UP = AB - AU - PB = 4 - 3r - 1 = 3 - 3r$ 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek NTM toepassen geeft $(3 - 3r)^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$ (met $0 < r < 1$) 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Het antwoord: $r \approx 0,52$ 1

Gebroken goniometrische functie

6 maximumscore 4

- Er moet gelden: $1-2\cos(a\pi)=0$, dus $\cos(a\pi)=\frac{1}{2}$ — 1
- Dit geeft $a\pi=\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ of $a\pi=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- Dus $a=\frac{1}{3}+k\cdot 2$ of $a=-\frac{1}{3}+k\cdot 2$ (met k geheel) — 1
- Voor deze waarden van a geldt $\sin(a\pi)\neq 0$ (, dus voor deze waarden van a is de lijn met vergelijking $x=\pi$ een verticale asymptoot van de grafiek van f_a) — 1

Opmerking
Als alleen de oplossingen $\frac{1}{3}$ en $-\frac{1}{3}$ gevonden zijn, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

7 maximumscore 5

- Bewezen moet worden dat $f_2(\frac{1}{2}\pi-p)=-f_2(\frac{1}{2}\pi+p)$ (voor elke waarde van p) — 2
- $f_2(\frac{1}{2}\pi-p)=\dfrac{\sin(\pi-2p)}{1-2\cos(\pi-2p)}$ en $f_2(\frac{1}{2}\pi+p)=\dfrac{\sin(\pi+2p)}{1-2\cos(\pi+2p)}$ — 1
- ($\sin(\pi-2p)=\sin(2p)$ en $\sin(\pi+2p)=-\sin(2p)$, dus) $\sin(\pi-2p)=-\sin(\pi+2p)$ — 1
- ($\cos(\pi-2p)=-\cos(2p)$ en $\cos(\pi+2p)=-\cos(2p)$, dus) $\cos(\pi-2p)=\cos(\pi+2p)$ (dus $f_2(\frac{1}{2}\pi-p)=-f_2(\frac{1}{2}\pi+p)$ voor elke waarde van p) — 1

Opmerking
Als voor p een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Boven en onder de lijn door de buigpunten

8 maximumscore 4

- $f_p''(x) = 12x^2 - 12p^2$ 1
- Primitiveren geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 12p^2x + a$ (met a een constante) 2
- Nogmaals primitiveren geeft $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ (met b een constante) (, dus is het gestelde juist) 1

Opmerking
Als met differentiëren is aangetoond dat $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$ *volgt uit* $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ *voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

9 maximumscore 4

- $x^4 - 6x^2 - 8x + 5 = -8x$ geeft $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ 1
- Dus $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$ 1
- Hieruit volgt $x^2 = 1$ of $x^2 = 5$ 1
- ($x^2 = 1$ geeft de x-coördinaten van de buigpunten, dus) de x-coördinaten van de twee gevraagde snijpunten zijn $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$ 1

10 maximumscore 4

- De oppervlakte van V_2 is gelijk aan $\int_{-1}^{1}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x$,
  dus aan $\int_{-1}^{1}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-1}^{1}=6\frac{2}{5}$ 1
- $6\frac{2}{5}=3\frac{1}{5}+3\frac{1}{5}$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

of

- Omdat zowel V_1 als V_3 onder de lijn met vergelijking $y=-8x$ ligt en V_2 erboven, is de bewering juist indien geldt:
  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x=0$, dus $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x=0$ 2
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}=0$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

Vierkant op een driehoek

11 maximumscore 4

- $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR})$ 1
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{AR}$ is het beeld van $\overrightarrow{AP}$ bij een rotatie over $-90°$, dus $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}$ 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1

of

- $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AR}$ 2
- $\overrightarrow{AR}$ is het beeld van $\overrightarrow{AP}$ bij een rotatie over $-90°$, dus $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix}$ 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2 - 2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1

12 maximumscore 4

- $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$ 1
- $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2}$ 1
- Herleiden tot $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}$ 1
- Dus $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{2}$ (dus de afstand van S tot M is constant) 1

of

- S moet dan liggen op een cirkel met middelpunt $M(1, 1)$ en straal r; deze heeft vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ 1
- Substitutie van de coördinaten van punt S geeft $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2$ 1
- Herleiden tot $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 1
- Dus S ligt op een cirkel met middelpunt $M(1, 1)$ en straal $\sqrt{2}$ (en dus is de afstand van S tot M constant) 1

Gespiegelde raaklijnen

13 maximumscore 4

- Een vergelijking van het spiegelbeeld van de raaklijn is $ay + x = b$ 1
- Er geldt: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit geeft $\cos\alpha = \dfrac{|2a|}{a^2 + 1}$ 1
- Omdat $a > 0$ geldt $\cos\alpha = \dfrac{2a}{a^2 + 1}$ 1

14 maximumscore 6

- $\dfrac{2a}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dit geeft $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a^2 - 2a + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$ 1
- Deze vergelijking exact oplossen geeft $a = \sqrt{3}$ of $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ 2
- $y = 2x^2$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x$ 1
- $4x = -a$, dus $x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ of $x = -\frac{1}{12}\sqrt{3}$ 1

Grafiek verdeelt rechthoek

15 maximumscore 7

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y=\frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x=p$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\int_p^{2p}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln x$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\ln(2p)-\ln p$ — 1
- $1+\ln(2p)-\ln p=1+\ln 2+\ln p-\ln p=1+\ln 2$
  (of: $1+\ln(2p)-\ln p$ $(=1+\ln\left(\frac{2p}{p}\right))=1+\ln 2$) — 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p\cdot\frac{1}{p}=2$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1-\ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) — 1

of

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y=\frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x=p$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $\int_p^{2p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{p}-\frac{1}{x}$ is $\frac{1}{p}x-\ln x$ — 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1-\ln(2p)+\ln p$ — 1
- $1-\ln(2p)+\ln p=1-\ln 2-\ln p+\ln p=1-\ln 2$
  (of: $1-\ln(2p)+\ln p$ $(=1-\ln\left(\frac{2p}{p}\right))=1-\ln 2$) — 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p\cdot\frac{1}{p}=2$ — 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) — 1

De ideale stoothoek

16 maximumscore 3

- $x'(t) = 8,4$ en $y'(t) = 11,2 - 9,8t$ 1
- $x'(0) = 8,4$ en $y'(0) = 11,2$ 1
- De snelheid op tijdstip $t = 0$ is $\sqrt{8,4^2 + 11,2^2} = 14,0$ (of 14) (m/s) 1

17 maximumscore 3

- Er moet gelden: $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 0,1\cdot 1,85}\right)$ is maximaal 1
- Beschrijven hoe hieruit α gevonden kan worden 1
- Het antwoord 0,74 (rad) (of 43°) (of nauwkeuriger) 1

18 maximumscore 6

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 40\cos^2\alpha - 40\sin^2\alpha$ 2
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ geeft $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45°) 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 20\cdot 2\cdot\cos(2\alpha)$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ geeft $\cos(2\alpha) = 0$ 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45°) 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ 1
- r is maximaal als $\sin(2\alpha)$ maximaal is 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) $\sin(2\alpha)$ is maximaal als $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 1
- Het antwoord: $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45°) 1